Лекция 9
ПОНЯТИЕ ОБ ОПЕРАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $f(z)$, а $h(\varphi)$ — индикатриса роста. Ранее было показано, что в полуплоскости $\mathrm{Re}(te^{i\varphi_0}) > h(\varphi_0) + \varepsilon + \delta \quad (\varepsilon > 0, \delta > 0)$ справедлива оценка

$$|f(z)| \le A(\varepsilon)e^{-\delta r}, \quad z = re^{i\varphi_0},$$

тогда для производной $f'(z)$ получим

$$\int_0^{\infty \cdot e^{i\varphi_0}} f'(z)e^{-zt}dz = f(z)e^{-zt}\Big|_{z=0}^{\infty \cdot e^{i\varphi_0}} + t\int_0^{\infty \cdot e^{i\varphi_0}} f(z)e^{-zt}dz,$$

тем самым функция, ассоциированная по Борелю с производной $f'(z)$, есть $t\gamma(t) - f(0)$. Поэтому для $f''(z)$ имеем функцию, ассоциированную по Борелю,

$$t[t\gamma(t) - f(0)] - f'(0) = t^2\gamma(t) - tf(0) - f'(0).$$

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 9.1. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального типа и $\gamma(t)$ — ее функция, ассоциированная по Борелю, тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ функции $f^{(m)}(z)$ соответствует функция, ассоциированная по Борелю, имеющая вид

$$t^m\gamma(t) - t^{m-1}f(0) - \ldots - f^{(m-1)}(0).$$

Применим эту теорему для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим уравнение

$$a_0y^{(n)}(x) + a_1y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_ny(x) = \varphi(x)$$

с начальными данными

$$y(0) = \alpha_0, \quad y'(0) = \alpha_1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(0) = \alpha_{n-1}.$$

Будем искать решение этого уравнения в классе целых функций экспоненциального типа, предполагая при этом, что правая часть уравнения — функция $\varphi(x)$ — из этого же класса.

Обозначим через $\gamma(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $y(x)$, а через $\gamma_1(t)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $\varphi(x)$. По теореме 9.1 от данного уравнения перейдем к уравнению

$$a_0[t^n\gamma(t) - t^{n-1}\alpha_0 - \ldots - \alpha_{n-1}] + a_1[t^{n-1}\gamma(t) - t^{n-2}\alpha_0 - \ldots - \alpha_{n-2}] + \ldots$$
$$\ldots + a_n\gamma(t) = \gamma_1(t).$$

Таким образом, мы перешли к уравнению относительно функции $\gamma(t)$; это уравнение называется ***операционным уравнением***, а сам метод — ***операционным методом***.

Для функции $\gamma(t)$ получим

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) + P_{n-1}(t)}{P(t)},$$

где $P(t)$ и $P_{n-1}(t)$ — многочлены: $P(t) = a_0t^n + a_1t^{n-1} + \ldots + a_n$ — характеристический многочлен, $P_{n-1}(t)$ — многочлен степени не выше $(n-1)$. Поэтому $\gamma(t)$ есть функция, аналитическая в окрестности бесконечно удаленной точки, и $\gamma(\infty) = 0$.

Если $\gamma(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{t^{n+1}}$, то $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}x^n$.

Решение $y(x)$ можно найти также по уже доказанной формуле с помощью теории вычетов

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \gamma(t)e^{tx}dt,$$

где C — контур, охватывающий сопряженную диаграмму $\bar{D}$.

Примеры

1. Найти решение уравнения

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = x^3e^{-2x}, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{cases}$$

Перейдем к операционному уравнению:

$$(t^2\gamma(t) - t - 2) + 4(t\gamma(t) - 1) + 4\gamma(t) = \gamma_1(t),$$

так как $\gamma_1(t) = \int\limits_0^{\infty} x^3e^{-2x}e^{-xt}dx = \frac{3!}{(t+2)^4}$, то

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_1(t) + t + 6}{(t+2)^2} = \frac{3!}{(t+2)^6} + \frac{1}{t+2} + \frac{4}{(t+2)^2}.$$

По теореме о вычетах решение $y(x)$ можно найти, например, как интеграл

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|t+2|=1} \gamma(t)e^{tx}dt = e^{-2t}\left(\frac{3!}{5!}t^5 + 4t + 1\right).$$

2. Найти решение уравнения

$$\begin{cases} y^{(4)}(x) + 2y^{(2)}(x) + y(x) = \sin x, \\ y(0) = y'(0) = y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = 0. \end{cases}$$

Для функции $\sin x$ функция $\gamma_1(t) = \dfrac{1}{t^2+1}$, поэтому имеем следующее операционное уравнение:

$$\gamma(t) = \frac{\frac{1}{t^2+1}}{t^4 + 2t^2 + 1} = \frac{1}{(t^2+1)^3}.$$

Тем самым $y(x)$ можно найти, например, по теореме о вычетах. Таким образом,

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=2} \frac{1}{(t^2+1)^3} e^{xt} dt,$$

или

$$y(x) = 2\mathrm{Re}\left[\operatorname*{res}_{t=i} \frac{e^{xt}}{(t^2+1)^3}\right] = \left.\left(\frac{e^{xt}}{(t+i)^3}\right)^{(2)}\right|_{t=i} = -\frac{3}{8}x\cos x + \frac{\sin x}{8}(-x^2+3).$$

Рассмотрим теперь **связь между индикатрисами роста самой функции и ее производной**.

Теорема 9.2. Пусть $f(z)$ — целая функция экспоненциального роста, $\gamma(t)$ — ассоциированная функция по Борелю с $f(z)$, $h(\varphi)$ — индикатриса роста $f(z)$, $\bar{D}$ — сопряженная диаграмма. Если начало координат — внутренняя точка множества D или $z = 0 \notin \bar{D}$, или $z = 0$ — граничная точка $\bar{D}$, являющаяся внутренней точкой отрезка, входящего в состав границы $\bar{D}$, то индикатрисы роста $f(z)$ и производной $f'(z)$ равны.

Доказательство. Производная $f'(z)$ имеет функцию, ассоциированную по Борелю: $t\gamma(t) - f(0)$. У функций $\gamma(t)$ и $t\gamma(t) - f(0)$ одни и те же особенности, кроме, быть может, точки $t = 0$. Пусть $\bar{D}_1$ — сопряженная диаграмма производной $f'(z)$, тогда $\bar{D}_1 \subset \bar{D}$. Если множества $\bar{D}_1$ и $\bar{D}$ не совпадают, то точка $t = 0 \in \bar{D}$, но $0 \neq \bar{D}_1$, а тогда $t = 0$ является граничной точкой множества $\bar{D}$ и одновременно угловой граничной точкой множества $\bar{D}$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, сопряженные диаграммы совпадают и, следовательно, совпадают индикатрисы роста. ■

Пример. Пусть $f(z) = e^z + 1$, $f(z) \in [1, +\infty)$, $f'(z) = e^z$. Для функции $f(z)$ функция, ассоциированная по Борелю, есть $\gamma(t) = \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1}$, для производной $f'(z) = e^z$ функция $\gamma_1(t) = \frac{1}{t-1}$. Сопряженные диаграммы не совпадают: множество $\bar{D}$ для $f(z)$ есть отрезок $[0, 1]$, а для функции $f'(z)$ множество $\bar{D}_1$ — это $\{1\}$. Точка $t = 0$ есть угловая точка отрезка $[0, 1]$.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 9.3. Пусть $F(z)$ — целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$ — ассоциированная по Борелю функция к $F(z)$, $\bar{D}$ — сопряженная диаграмма.

Если $\bar{D} \subset G = \{t\colon |e^t - 1| < 1\}$, где G — односвязная область, содержащая точку $t = 0$, то справедливо разложение

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k F(0)}{k!} z(z-1)\cdots(z-k+1), \quad z \in \mathbb{C},$$

ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k F(0)}{k!} z(z-1)\cdots(z-k+1)$ называется ***интерполяционным рядом Ньютона***, $\Delta^k F(0) = F(k) - C_k^1 F(k-1) + \ldots + (-1)^k F(0)$.

Доказательство. Заметим, что множество $G = \{t\colon |e^t - 1| < 1\}$ — односвязная область, содержащая точку $t = 0$. Функцию $F(z)$ представим в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \gamma(t) e^{zt} dt,$$

где C — контур, лежащий в области G и охватывающий сопряженную диаграмму $\bar{D}$.

Положим $e^t = u$, тогда

$$e^{tz} = u^z = e^{z \ln u} = \varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(1)}{k!}(u-1)^k, \quad |u-1| < 1,$$

функция $\varphi(u)$ аналитична в круге $|u - 1| < 1$. Так как $\varphi^{(k)}(1) = z(z-1)\cdots(z-k+1)$, то

$$e^{tz} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}(e^t - 1)^k.$$

Когда $t \in C$, то $|e^t - 1| < q < 1$ и ряд сходится равномерно относительно $t \in C$, поэтому

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_C (e^t - 1)^k \gamma(t) dt.$$

Исходя из того, что $F(m) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_C e^{mt} \gamma(t) dt$, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C (e^t - 1)^k \gamma(t) dt = \sum_{j=0}^{k} C_k^j \oint_C e^{tj} (-1)^{k-j} \gamma(t) dt = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j F(j) = \Delta^k F(0).$$

Теорема доказана. ■

Применим эту теорему для доказательства теоремы Полиа.

Теорема Полиа. Пусть выполнены условия теоремы 9.3 и пусть $F(k)$ — целые числа, $k = 0, 1, 2, \ldots$, тогда функция $F(z)$ есть многочлен.

Доказательство. По теореме 9.3 справедливо разложение

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k F(0)}{k!} z(z-1)\cdots(z-k+1), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Положим $z = -1$, тогда

$$F(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \Delta^k F(0).$$

Так как ряд сходится, то выполнено *необходимое условие сходимости ряда*: $\Delta^k F(0) \to 0$, $k \to \infty$. По условию теоремы $\Delta^k F(0)$ есть целые числа, тем самым $\Delta^k F(0) = 0$ при $k > N$.

Окончательно функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\Delta^k F(0)}{k!} z(z-1)\cdots(z-k+1).$$

Теорема доказана. ■

Рассмотрим пример, подтверждающий, что условие $\overline{D} \subset G = \{t\colon |e^t - 1| < 1\}$ в теореме Полиа по существу.

Пример. Функция $f(z) = e^{z\ln 2}$ — целая функция экспоненциального типа. В точках $z = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ функция $f(z)$ принимает целые значения, но она не есть многочлен. Сопряженная диаграмма этой функции $\overline{D} = \{\ln 2\}$ — точка, лежащая на границе области G. Функция $e^{z\ln 2}$ не разлагается в интерполяционный ряд Ньютона на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Задачи

I. Доказать, что функции-оригиналу

$$f(t)=\begin{cases} t^{\nu}, & t>0, \nu>-1, \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

соответствует преобразование Лапласа $\dfrac{\Gamma(\nu+1)}{p^{\nu-1}}$, $\operatorname{Re} p>0$.

II. Пусть функциям $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответствуют преобразования Лапласа

$$f_1(t) \doteqdot F_1(p), \qquad f_2(t) \doteqdot F_2(p),$$

при этом s_1 и s_2 — показатели роста функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ соответственно. Доказать, что функция $F(p)=F_1(p)\cdot F_2(p)$ есть преобразование Лапласа для свертки

$$\varphi(t)=\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau, \qquad \operatorname{Re} p>\max(s_1,s_2).$$

III. Пусть $f(t)$ — целая функция, при этом $|f(t)|<Me^{a_0|t|}$. Показать, что преобразование Лапласа $F(p)\doteqdot\chi(t)\varphi(t)$, где $\chi(t)$ — функция Хевисайда, есть аналитическая функция в $U_\varepsilon(\infty)$, $\varepsilon>0$ и ее лорановское разложение в $U_\varepsilon(\infty)$ имеет вид

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k},$$

при этом $a_k=b_{k-1}(k-1)!$, где b_k — тейлоровские коэффициенты в разложении функции $f(t)$.

IV. Пусть функция $F(p)\in A(U_\varepsilon(\infty))$, $\varepsilon>0$ и ее лорановское разложение в $U_\varepsilon(\infty)$ имеет вид

$$F(p)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{p^k}.$$

Доказать, что функция $f(t)=\chi(t)\varphi(t)$, где $\chi(t)$ — функция Хевисайда, $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{a_k}{(k-1)!}t^{k-1}$, является оригиналом функции

$$F(p)\doteqdot\chi(t)\varphi(t)=f(t),$$

и показать, что $\varphi(t)$ есть целая функция.

V. Показать, что функция $x(t) = Ct^{n/2}\Im_n(2\sqrt{t})$, где $\Im_n(z)$ — функция Бесселя n-го порядка, есть решение уравнения

$$\begin{cases} tx''(t) + (1-n)x'(t) + x(t) = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

VI. Используя преобразование Лапласа, решить задачи:

1) $$\begin{cases} u_x = u_{xx} + a^2 u + f(x), \\ u(0, y) = u_x(0, y) = 0, \quad x > 0, \quad y > 0, \\ f(x) \in C(x \geq 0); \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} u_x = u_{xx} + u + B\cos x, \\ u(0, y) = Ae^{-3y}, \quad u_x(0, y) = 0, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$